• Déterminons tout d'abord une équation cartésienne du plan P = (BCD) :

On sait que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal de P, avec

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc P: $-x-y-z+d=0$.

$B \in P \Leftrightarrow d=1$.

D'où : P: $x+y+z-1=0$. Par suite d

$$(A,P) = \frac{|-1+1+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{d(A,P)=0}$.

Exercice n° 10

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

Exercice n° 11

● Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec : $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

avec : $(a',b',c') \neq (0,0,0)$

On a: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A B et C définissent un plan P .

3) P = (ABC) : $x+y+z+d=0$

$A \in P \Leftrightarrow 1+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

D'où : $\boxed{\text{P: } x+y+z-2=0}$

Exercice n° 12

P: $x+y+z+1=0$; P': $x-y+2z-1=0$

● $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

● $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

● $\vec{w} \neq \vec{0}$ donc P et P' sont sécants suivant la droite Δ ayant pour équations cartésiennes

$$\Delta : \begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x-y+2z-1=0 & (2) \end{cases}.$$

Posons $z = t$, on aura: $(1)+(2) \Rightarrow 2x+3z=0$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}z$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y-z+2=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}z - 1.$

Donc $\Delta : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \\ z = t \end{cases}$.$t \in \mathbb{R}$

D'où la droite d'intersection de P et P' est

$$\Delta\left(A\left(0,-1,0\right); \vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice n° 13

$\vec{u}\vec{v} = 0$.

Montrons que : $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, posons $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn